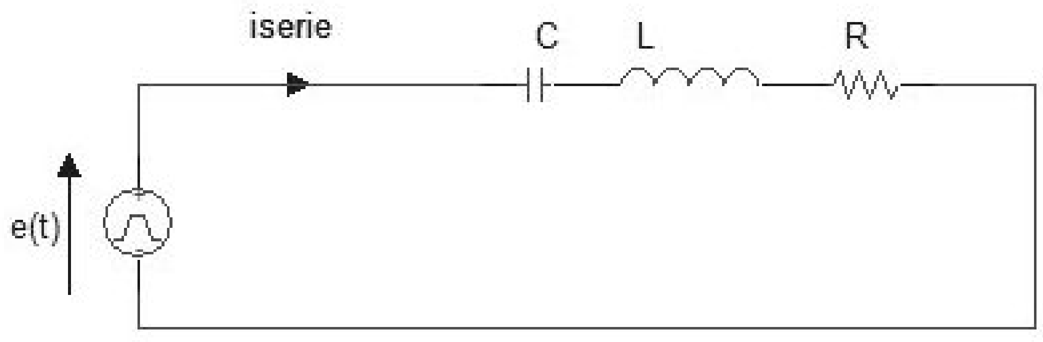
Risoluzione di un circuito RLC

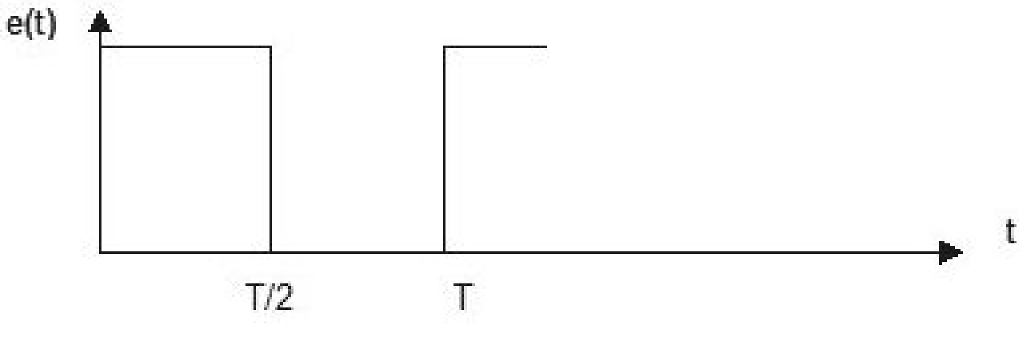
La risoluzione, (cioè la determinazione di tensioni e correnti nel dominio del tempo), di un circuito RLC di una certa complessità circuitale porterebbe a scrivere una equazione differenziale di ordine corrispondente al numero degli elementi reattivi che si trovano nel circuito.
Porto come esempio il circuito risonante serie.
In questo circuito sono presenti 1 condensatore e 1 induttore , l'equazione differenziale corrispondente è del 2° ordine lineare a coefficienti costanti.
Come noto, esistono dei metodi matematici per risolvere una equazione del genere (omogenea associata, equazione caratteristica , integrale particolare, condizioni iniziali e finali)
Considerata la potenza di calcolo dei moderni PC è però possibile risolvere il circuito in modo approssimato e senza giungere all'espressione dell'equazione differenziale del 2° ordine.

1. si scrivono le equazioni differenziali del 1° ordine dei singoli componenti il circuito (condensatori, induttori)
2. si scrivono i principi di Kirchhoff per il circuito (nodi e maglie, correnti e tensioni)
3. le derivate del 1° ordine vengono approssimate come rapporti incrementali
4. si trovano i valori delle tensioni e correnti all'istante n+1 in funzione dei valori all'istante n (ogni tensione o corrente sarà rappresentata con un insieme finito e ordinato di valori, una matrice)
5. facendo eseguire al PC il calcolo dei valori per un numero molto grande di volte (1000 volte possono bastare), si ottengono risultati abbastanza precisi (non serve nemmeno risolvere il sistema di equazioni, lo fa il PC)

Il metodo di risoluzione approssimata delle equazioni differenziali è quello di Eulero (anno 1750 ! circa).

Vediamo l'applicazione pratica al circuito risonante serie.





Scrivo le equazioni differenziali relative ai singoli componenti e i principi di Kirchhoff relativi al circuito:

$$e = v_L + v_C + v_R$$

$$v_L = L \frac{di_{serie}}{dt}$$

$$i_{serie} = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$v_R = Ri_{serie}$$

Trasformo le equazioni differenziali in equazioni alle differenze finite, ricordando che una derivata si può approssimare con il suo rapporto incrementale, es. per la funzione f(t):

$$\left[\frac{df(t)}{dt}\right]_{t=t_1} \cong \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_1+\Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

con Δt molto piccolo

$$\Delta i_{serie} = \frac{v_L}{L}\Delta t$$

$$e = v_L + v_C + Ri_{serie}$$

$$\Delta v_C = \frac{i_{serie}}{C}\Delta t$$

Se le funzioni sono periodiche, cosa che si verifica quasi sempre nei casi pratici, divido il periodo T in tanti piccoli intervalli di tempo:

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{f \cdot N}$$

f è la frequenza del segnale N è un numero intero molto grande (es. N=1000)
($i_{serie\ n}$; $v_{C\ n}$; $v_{L\ n}$; e_n sono delle matrici unidimensionali composte da N valori, sono cioè i valori delle funzioni all'istante $n \cdot \Delta t$)
I valori delle funzioni all'istante n+1 saranno:

$$i_{serie\ \ n+1} = i_{serie\ n} + \frac{v_{L\ n}}{L}\Delta t$$

$$v_{L\ n} = e_n - v_{C\ n} - Ri_{serie\ n}$$

$$v_{C\ n+1} = v_{C\ n} + \frac{i_{serie\ n}}{C}\Delta t$$

(ammettendo un D.C. del 50 %, $e_n = E$ per: $1 \leq n \leq \frac{N}{2}$; $e_n = 0$ per $\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N$), per tener conto dei valori raggiunti dalle funzioni passando da un semiperiodo all'altro:

$$i_{serie}\ (\frac{N}{2} + 1) = i_{serie}\ (\frac{N}{2})$$

$$v_C\ (\frac{N}{2} + 1) = v_C\ (\frac{N}{2})$$

$$v_L\ (\frac{N}{2} + 1) = v_L\ (\frac{N}{2})$$

se, come richiesto dalla situazione reale, si desidera conoscere il comportamento del sistema dopo un certo numero di periodi, bisogna che il periodo successivo tenga conto dei valori raggiunti dalla funzione nel periodo precedente, cioè:

$$i_{serie}(1) = i_{serie}(N)$$

$$v_C(1) = v_C(N)$$

$$v_L(1) = v_L(N)$$

eseguendo 2 cicli for per i semiperiodi definiti sopra (uno con $e_n = E$ e un altro con $e_n = 0$) più un altro ciclo for per conoscere la situazione dopo un certo numero di periodi si ottengono risultati abbastanza precisi.

Dall'esame delle forme d'onda, si può vedere che, anche con un Q piccolo (Q = 4), la corrente nel circuito risonante è quasi sinusoidale nonostante sia stato sottoposto ad un'onda quadra unipolare. Nel carico R circolerà quindi quasi esclusivamente la prima armonica.