

Risoluzione di un circuito RLC

La risoluzione, (cioè la determinazione di tensioni e correnti nel dominio del tempo), di un circuito RLC di una certa complessità circuitale porterebbe a scrivere una equazione differenziale di ordine corrispondente al numero degli elementi reattivi che si trovano nel circuito.

Porto come esempio il circuito elettrico dell'amplificatore in Classe E .

In questo circuito sono presenti 2 condensatori e 2 induttori , l'equazione differenziale corrispondente è del 4° ordine!

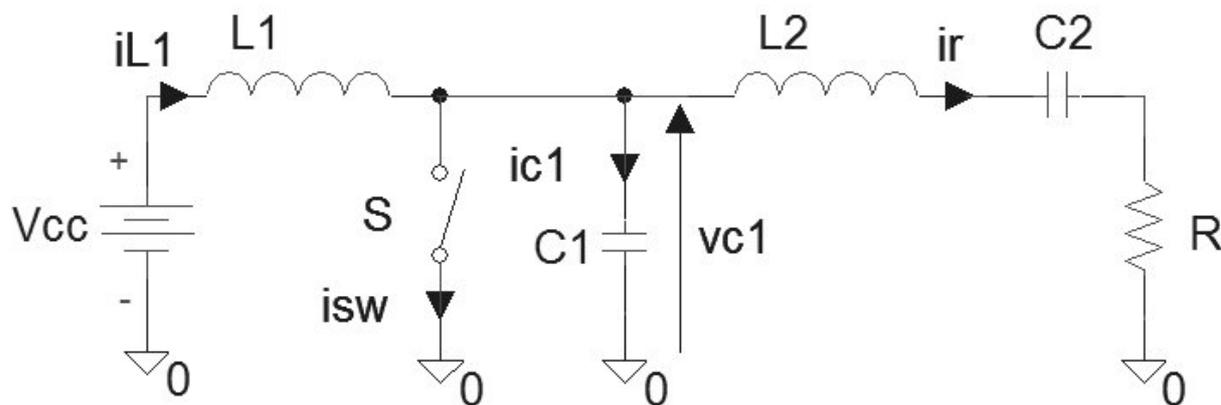
Nel circuito inoltre è presente un interruttore ideale che simula un MOSFET o un BJT, difficile se non impossibile rappresentarlo con un generatore.

Considerata la potenza di calcolo dei moderni PC è però possibile risolvere il circuito in modo approssimato e senza giungere all'espressione dell'equazione differenziale del 4° ordine.

1. si scrivono le equazioni differenziali del 1° ordine dei singoli componenti il circuito (condensatori, induttori)
2. si scrivono i principi di Kirchhoff per il circuito (nodi e maglie, correnti e tensioni)
3. i punti 1. e 2. vengono ripetuti per l'interruttore aperto e chiuso
4. le derivate del 1° ordine vengono approssimate come rapporti incrementali
5. si trovano i valori delle tensioni e correnti all'istante $n+1$ in funzione dei valori all'istante n (ogni tensione o corrente sarà rappresentata con un insieme finito e ordinato di valori, una matrice)
6. facendo eseguire al PC il calcolo dei valori per un numero molto grande di volte (1000 volte possono bastare), si ottengono risultati abbastanza precisi (non serve nemmeno risolvere il sistema di equazioni, lo fa il PC)

Il metodo di risoluzione approssimata delle equazioni differenziali è quello di Eulero (anno 1750 ! circa).

Vediamo l'applicazione pratica al circuito dell'amplificatore ideale in Classe E.



Scrivo le equazioni differenziali relative ai singoli componenti e i principi di Kirchhoff relativi al circuito:

$$S = ON$$

$$V_{CC} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}$$

$$v_{C_1} = 0 = L_2 \frac{di_r}{dt} + v_{C_2} + Ri_r$$

$$i_r = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt}$$

$$S = OFF$$

$$V_{CC} - v_{C_1} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}$$

$$v_{C_1} = L_2 \frac{di_r}{dt} + v_{C_2} + Ri_r$$

$$i_r = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt}$$

$$i_{L_1} = i_r + i_{C_1}$$

$$i_{C_1} = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}$$

Trasformo le equazioni differenziali in equazioni alle differenze finite, ricordando che una derivata si può approssimare con il suo rapporto incrementale, es. per la funzione $f(t)$:

$$\left[\frac{df(t)}{dt} \right]_{t=t_1} \cong \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \frac{f(t_1+h) - f(t_1)}{h}$$

con $h = \Delta t$ molto piccolo

$$S = ON$$

$$\Delta i_{L_1} = \frac{V_{CC}}{L_1} \Delta t$$

$$\Delta i_r = -\frac{v_{C_2}}{L_2} \Delta t - \frac{R}{L_2} \Delta t$$

$$\Delta v_{C_2} = \frac{i_r}{C_2} \Delta t$$

$S = OFF$

$$\Delta i_{L_1} = \frac{V_{CC} - v_{C_1}}{L_1} \Delta t$$

$$\Delta i_r = \frac{v_{C_1}}{L_2} \Delta t - \frac{v_{C_2}}{L_2} \Delta t - \frac{R}{L_2} i_r \Delta t$$

$$\Delta v_{C_2} = \frac{i_r}{C_2} \Delta t$$

$$i_{C_1} = i_{L_1} - i_r$$

$$\Delta v_{C_1} = \frac{i_{C_1}}{C_1} \Delta t$$

Se le funzioni sono periodiche, cosa che si verifica quasi sempre nei casi pratici, divido il periodo T in tanti piccoli intervalli di tempo:

$$\Delta t = \frac{T}{N} = \frac{1}{fN}$$

f è la frequenza del segnale N è un numero intero molto grande (es. $N=1000$)

I valori delle funzioni all'istante $n+1$ saranno: (i_{L_1n} ; i_m ; v_{C_2n} ; v_{C_1n} sono delle matrici unidimensionali composte da N valori, sono cioè i valori delle funzioni all'istante $n\Delta t$)
es.:

$S = ON$

$$i_{L_1n+1} = i_{L_1n} + \frac{V_{CC}}{L_1} \Delta t$$

$$i_{m+1} = i_m - \left(\frac{v_{C_2n}}{L_2} \Delta t + \frac{R}{L_2} i_m \right) \Delta t$$

$$v_{C_2n+1} = v_{C_2n} + \frac{i_m}{C_2} \Delta t$$

per: $1 \leq n \leq \frac{N}{2}$ (ammettendo un D.C. del 50 %, l'interruttore rimane chiuso per un semiperiodo e aperto per l'altro), per tener conto dei valori raggiunti dalle funzioni passando da un semiperiodo all'altro:

$$i_{L_1} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) = i_{L_1} \left(\frac{N}{2} \right)$$

$$i_r \left(\frac{N}{2} + 1 \right) = i_r \left(\frac{N}{2} \right)$$

$$v_{C_2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) = v_{C_2} \left(\frac{N}{2} \right)$$

$$v_{C_1} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) = v_{C_1} \left(\frac{N}{2} \right)$$

$S = OFF$

$$i_{L_1n+1} = i_{L_1n} + \frac{V_{CC} - v_{C_1n}}{L_1} \Delta t$$

$$i_{r_{n+1}} = i_{r_n} + \frac{v_{C_1n}}{L_2} \Delta t - \frac{v_{C_2n}}{L_2} \Delta t - \frac{R}{L_2} i_{r_n} \Delta t$$

$$v_{C_2n+1} = v_{C_2n} + \frac{i_{r_n}}{C_2} \Delta t$$

$$i_{C_1n} = i_{L_1n} - i_{r_n}$$

$$v_{C_1n+1} = v_{C_1n} + \frac{i_{C_1n}}{C_1} \Delta t$$

per: $\frac{N}{2} + 1 \leq n \leq N$

se, come richiesto dalla situazione reale, si desidera conoscere il comportamento del sistema dopo un certo numero di periodi, bisogna che il periodo successivo tenga conto dei valori raggiunti dalla funzione nel periodo precedente, cioè:

$$i_{L_1}(1) = i_{L_1}(N)$$

$$i_r(1) = i_r(N)$$

$$v_{C_2}(1) = v_{C_2}(N)$$

$$v_{C_1}(1) = v_{C_1}(N)$$

eseguendo 2 cicli for per i semiperiodi definiti sopra e un altro ciclo for per conoscere la situazione dopo un certo numero di periodi si ottengono risultati abbastanza precisi.

Progetto e verifica dell'amplificatore in classe E portano a risultati leggermente diversi poiché, a mio avviso, nel progetto si considera la corrente nell'induttore L1 praticamente continua. Ciò si otterrebbe con un valore di L1 molto grande ma con un tale valore il condensatore C1 non riesce a caricarsi nel semiperiodo in cui l'interruttore risulta aperto. L1 quindi deve avere un valore abbastanza grande da assicurare una corrente quasi continua ma non troppo in modo da permettere a C1 di caricarsi nel semiperiodo di non conduzione del Mosfet.