Spettro di modulazioni analogiche

Si trova lo spettro del segnale modulato mediante la trasformata discreta di Fourier (DFT).
La DFT è così "definita", in realtà deriva da una discretizzazione della trasformata di Fourier.
Considerati N campioni del segnale in una finestra temporale di ampiezza W, i campioni sono presi a intervalli di tempo: $\Delta t = \frac{W}{N}$; applicando la DFT si ottiene uno spettro con parte reale e immaginaria anch'esso discreto, cioè costituito da N elementi che sono intervallati in frequenza di : Δf .

Il legame tra Δt e Δf è : $\Delta f \bullet \Delta t = \frac{1}{N}$; infatti:

$$\Delta f = \frac{f_c}{N} = \frac{1}{N \bullet \Delta t} = \frac{1}{W}$$

$$f_c = \frac{1}{T_c} = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\Delta f = \frac{1}{N \bullet \Delta t} = \frac{1}{W}$$

fc è la frequenza di campionamento e Tc è l'intervallo di campionamento.

Trasformata Discreta di Fourier (1/3)

DFT: Discrete Fourier Transform
Consideriamo una successione $x[n] = x(n\Delta t)$ di N campioni ($n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$) ottenuti campionando il segnale $x(t)$ in modo uniforme nel tempo, con periodo Δt.
La **trasformata discreta di Fourier** è definita come:

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi k\Delta f n\Delta t}$$

dove Δf è l'intervallo di campionamento in frequenza:

$$\Delta f = \frac{1}{N\Delta t}$$

Trasformata Discreta di Fourier (2/3)

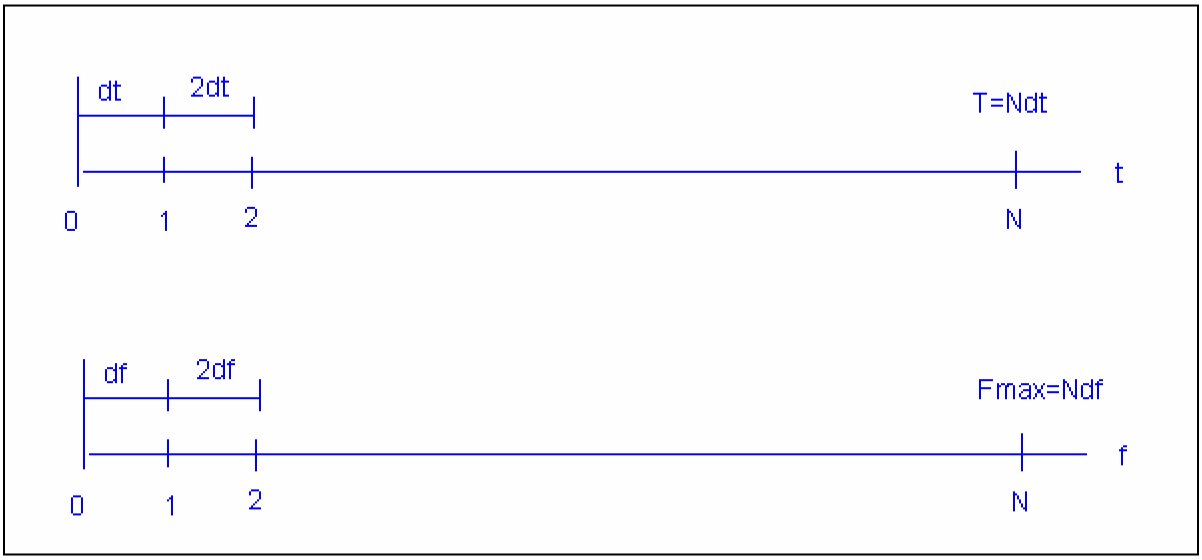
Osservazione: La definizione di DFT

$$X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) e^{-j2\pi k\Delta f n\Delta t}$$

si ottiene dalla trasformata di Fourier, discretizzando il tempo t e la frequenza f, e sostituendo l'integrale con la sommatoria sugli N campioni.

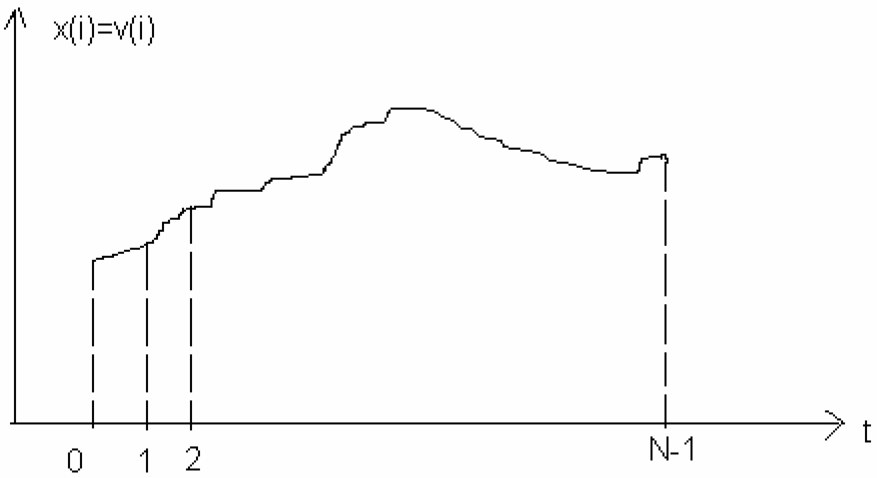
L'**antitrasformata discreta di Fourier** è:

$$x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Delta f) e^{j2\pi k\Delta f n\Delta t}$$



T=W ; dt = Δt ; df = Δf

$$f_{\max} = N \bullet \Delta f = \frac{N}{W} = f_c$$



$$X(k) = X_{re}(k) + jX_{im}(k)$$

$$x(i) \bullet e^{-j\frac{2\pi ki}{N}} = x(i) \bullet (\cos\frac{2\pi ki}{N} - jsen\frac{2\pi ki}{N})$$

$$X(k) = \frac{W}{N} \bullet [\sum_{i=0}^{N-1} x(i) \bullet \cos\frac{2\pi ki}{N} + j\sum_{i=0}^{N-1} x(i) \bullet (-sen\frac{2\pi ki}{N})]$$

$$X_{re}(k) = \frac{W}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i) \bullet \cos\frac{2\pi ki}{N}$$

$$X_{im}(k) = -\frac{W}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x(i) \bullet (sen\frac{2\pi ki}{N})$$

$$x(i) = v(i)$$

questo per lo spettro del segnale.

A questo punto si può filtrare il segnale eliminando le componenti di frequenza comprese tra f_i e f_s , cioè i campioni compresi in frequenza tra f_i e f_s cioè i campioni tra: $f_i \bullet W$ e $f_s \bullet W$ e, poiché lo spettro è bilatero anche tra: $N - f_s \bullet W$ e $N - f_i \bullet W$

Per tornare nel dominio del tempo antitrasformo:

$$x_r(i) = v_r(i) = \frac{1}{W}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi ki}{N}} = \frac{1}{W}\sum_{k=0}^{N-1}[X_{re}(k) + jX_{im}(k)](\cos\frac{2\pi ki}{N} +$$

$$= \frac{1}{W}\sum_{k=0}^{N-1}[X_{re}(k)\cos\frac{2\pi ki}{N} - jX_{im}(k)sen\frac{2\pi ki}{N}]$$

Una proprietà dello spettro ottenuto con la DFT è la simmetria rispetto a N/2 (spettro bilatero) , cioè si può scrivere:

$$X(N-k) = X^*(k)$$

dove $X^*(k)$ è il complesso coniugato di $X(k)$, quindi:

$$X_{re}(N-k) = X_{re}(k)$$

$$X_{im}(N-k) = -X_{im}(k)$$

Sfruttando questa proprietà è possibile calcolare solo i campioni dello spettro fino a N/2 e avere a disposizione anche gli altri da N/2+1 a N-1.
Per ottenere il modulo delle righe dello spettro ho applicato questa relazione:

$$\left| X(k) \right| = \frac{2}{W} \sqrt{X^2{}_{re}(k) + X^2{}_{im}(k)}$$

(non sono riuscito a dimostrare la presenza del coefficiente 2/W, però è così!)
La frequenza massima del grafico per uno spettro bilatero è (campioni da 0 a N-1):

$$f_{\max} = N \bullet \Delta f = \frac{N}{W}$$

ma poiché lo spettro significativo è quello relativo ai campioni da 0 a N/2, la frequenza massima rappresentabile risulta dimezzata:

$$f_{\max} = \frac{N}{2 \bullet W}$$

ho quindi imposto questa limitazione relativamente alle frequenze: fp, fm, frequenza della portante e frequenza della modulante.
Ho notato che se il numero di periodi dei segnali nella finestra di osservazione non è intero lo spettro risultante non è valido, per cui il programma controlla che W, f portante e f modulante siano numeri interi, in realtà basterebbe che il numero di periodi nella finestra di osservazione fosse intero cioè il prodotto: W*f portante e W*f modulante.
La finestra di osservazione W deve contenere alcuni periodi del segnale modulante per cui W sarà un multiplo di 1/f modulante.
Per semplicità ho preferito una condizione più restrittiva.
Per una migliore visualizzazione dello spettro ho inserito dei coefficienti di espansione nelle formule relative alla rappresentazione dell'asse orizzontale delle frequenze.

Esempio:
Per la AM si considera una portante sinusoidale (fp = 30 kHz) di ampiezza 25 V modulata da un segnale sinusoidale (fm = 3 kHz) con indice di modulazione mAM = 0.5. Lo spettro è composto dalla portante (25 V) più due bande laterali inferiore e superiore rispettivamente a 27 kHz e a 33 kHz di ampiezza mAp/2 cioè pari a 6.25 V.

Per la FM e la PM si considera una portante sinusoidale (fp = 30 kHz) di ampiezza 25 V modulata da un segnale sinusoidale (fm = 3 kHz) con indice di modulazione mf = 4.05. Lo spettro è composto da numerose righe spettrali distanti tra loro di fp = 30 kHz.
Per mf = 2.4 la riga dello spettro relativa alla portante si annulla.

Per evitare distorsioni nella ricostruzione del segnale partendo dalla trasformata deve essere soddisfatta la condizione di Shannon-Nyquist: la frequenza di campionamento deve essere maggiore di due volte la frequenza massima del segnale, cioè:

$$f_c \geq 2 f_{max}$$

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\frac{W}{N}} \geq 2 f_{max}$$

$$N \geq 2 f_{max} \cdot W$$

nel caso dell'esempio:

$$N \geq 2 \cdot 30e3 \cdot 2e-3 = 120$$

quindi N = 1000 campioni va bene.

Gli esempi considerati si riferiscono a segnali periodici analizzati in una finestra di ampiezza temporale W , per analizzare un segnale aperiodico bisognerebbe fornire al programma gli N campioni.