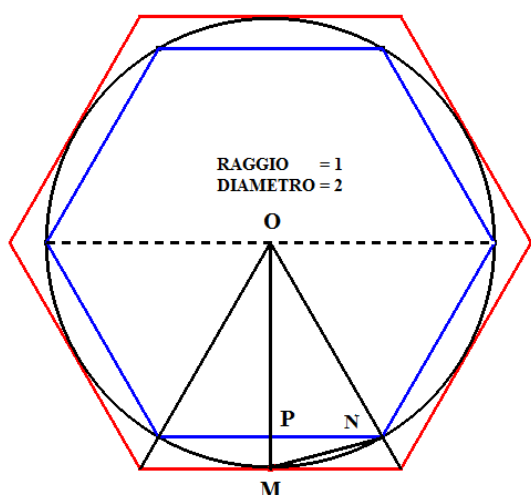


ARCHIMEDE E DETERMINAZIONE PI GRECO PI CON ESAUSTIONE di Luciano Porta

metodo originale per poligoni circoscritti



LP PIGRECO%20DETERMINATO%20COL%20METODO%20DI%20ARCHIMEDE[1]
DETERMINAZIONE DI PI COL METODO DI ARCHIMEDE :

NUMERO LATI =6	3... < PI < 3.46410161...
NUMERO LATI =12	3.10582854... < PI < 3.21539031...
NUMERO LATI =24	3.13262861... < PI < 3.15965994...
NUMERO LATI =48	3.13935021... < PI < 3.14608622...
NUMERO LATI =96	3.14103195... < PI < 3.1427146...
NUMERO LATI =192	3.14145247... < PI < 3.14187305...
NUMERO LATI =384	3.14155761... < PI < 3.14166275...
NUMERO LATI =768	3.14158389... < PI < 3.14161018...
NUMERO LATI =1536	3.14159047... < PI < 3.14159704...
NUMERO LATI =3072	3.14159211... < PI < 3.14159375...
NUMERO LATI =6144	3.14159252... < PI < 3.14159293...
NUMERO LATI =12288	3.14159262... < PI < 3.14159272...
NUMERO LATI =24576	3.14159265... < PI < 3.14159267...
NUMERO LATI =49152	3.14159265... < PI < 3.14159266...
NUMERO LATI =98304	3.14159266... < PI < 3.14159266...
NUMERO LATI =196608	3.14159266... < PI < 3.14159266...

(schermata dal software scritto dall'autore)

Ricordiamo che $\pi = C/d$. E' un numero **irrazionale** (numero decimale illimitato non periodico e che quindi non può essere scritto sotto forma di frazione). E' anche un numero **trascendente**.

Una conseguenza della trascendenza è che risulta impossibile, utilizzando riga e compasso, la rettificazione della circonferenza (cioè tracciare un segmento lungo quanto una circonferenza) e la quadratura del cerchio (cioè il disegnare un quadrato equivalente a un cerchio).

Si ricorda che vi sono irrazionali non trascendenti come la radice quadrata di 2 (disegnando un triangolo rettangolo i cui cateti misurano entrambi 1, l'ipotenusa è la radice quadrata di 2).

Il valore di π può essere calcolato in modo approssimato: 3,1415926535 ... con molti metodi.

Possiamo ad esempio applicare il metodo di **esaustione** di **Archimede** (ovviamente egli utilizzò nei calcoli le frazioni e non i numeri decimali) che inscresse e circoscrisse poligoni regolari di **6, 12, 24, 48, 96** lati ottenendo il valore: $3 + 10/71 < \pi < 3 + 10/70$. Noi possiamo raddoppiare ulteriormente il numero di lati per migliorare l'approssimazione (dati in tabella).

Archimede determinò per ogni coppia (poligono inscritto e circoscritto) il rapporto tra perimetro e diametro ed osservando che la lunghezza della circonferenza è compresa tra i due perimetri, calcolò π per difetto e per eccesso. Raddoppiando ogni volta il numero dei lati la "forbice" si riduce perché i due poligoni si avvicinano sempre più alla circonferenza.

Procedimento:

Ricordiamo che tutti i cerchi sono simili e quindi, poiché il valore di π non dipende dalla loro grandezza, per semplificare i calcoli conviene considerare il **raggio = 1 (diametro = 2)**.

n numero lati poligono inscritto e circoscritto

li lunghezza lato poligono inscritto

a apotema poligono inscritto

lc lunghezza lato poligono circoscritto

ri rapporto perimetro poligono inscritto e diametro cerchio

rc rapporto perimetro poligono circoscritto e diametro cerchio

d differenza tra raggio (= 1) e apotema poligono inscritto

Ricordando che l'apotema del poligono circoscritto è il raggio del cerchio, l'autore dell'articolo ha pensato di determinare il lato del poligono circoscritto **l_c** con una **proporzione**, poiché i poligoni inscritto e circoscritto sono simili, rendendo così il procedimento molto più semplice:

$$l_c : l_i = 1 : a \quad \text{da cui} \quad l_c = l_i / a$$

Si inizia con un esagono regolare (**n = 6; l_i = 1**) .

Si calcola **l_i** nel poligono successivo (**dodecagono** ecc.) applicando il teorema di Pitagora al triangolo **MNP** ...

PN è la metà del lato del poligono inscritto.

PM è differenza tra il raggio (=1) e l'apotema del poligono inscritto.

MN è il lato del nuovo poligono inscritto con numero di lati doppio rispetto al precedente (**n = n*2**).

Algoritmo:

$$n = 6 ; l_i = 1$$

$$a = \sqrt{1^2 - (l_i / 2)^2}$$

$$l_c = l_i / a$$

$$r_i = l_i * n / 2 ; r_c = l_c * n / 2 \quad (\text{si ricorda che } 2 \text{ è il diametro e che } r_i < \pi < r_c)$$

$$d = 1 - a$$

$$l_i = \sqrt{d^2 + (l_i / 2)^2} \quad (l_i \text{ è il lato del poligono con un numero doppio di lati del precedente})$$

$$n = n * 2 \quad (\text{si raddoppia il numero dei lati a ogni iterazione})$$

Osservazione:

Se il metodo di Archimede viene insegnato nella scuola secondaria di primo grado, ci si può limitare allo studio dell'esagono inscritto e circoscritto.

Considerando il **raggio = 1** e il **diametro = 2** si ha:

perimetro esagono (inscritto) = 6 * 1 ; X = perimetro esagono (circoscritto)

apotema esagono (inscritto) = 0,866 circa (applicando il teorema di Pitagora)

apotema esagono (circoscritto) = 1

quindi: 6 : X = 0,866 : 1

$$X = (6 * 1) / 0,866 = 6,928 \dots \quad \text{da cui : } 6 < \underline{2\pi * 1} < 6,928$$

(circonf.)

$$3 < \pi < 3,464$$